Vorlesung Systemtheorie und Regelungstechnik (SR)
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg – Sommersemester 2014

Übungsblatt 1: Modellierung und Simulation von ODE

(Abgabe am 14.5.2014 von 8:00-8:15 im Vorlesungs-Hörsaal)

Prof. Dr. Moritz Diehl, Mario Zanon, und André Blickensdörfer

Theorie-Aufgaben (auf Papier)

1. Modellieren Sie die Wassermenge $m(t)$ [kg] in einem Waschbecken, in das Sie durch einen Wasserhahn Wasser mit der steuerbaren Massenflussrate $u(t)$ [kg/s] einlaufen lassen. Neben dem Zufluss $u(t)$ durch den Wasserhahn gebe es auch einen Ausfluss, da der Stöpsel offen ist. Der Ausfluss habe die Massenflussrate $k\sqrt{m(t)}$, wobei k eine positive Konstante (mit Einheit $\sqrt{\text{kg}}$/s) ist. Skizzieren Sie erst das Waschbecken mit seinen Ein- und Ablaufströmen. Entscheiden Sie dann, welchen Zustand - oder welche Zustände - x Sie brauchen, und leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung (ODE) der Form $\dot{x} = f(x, u)$ her (3 Punkte).

2. Leiten Sie eine Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f(x, u)$ für die folgenden drei, komplexer werdenden Kran-Systeme her. Wir können annehmen, dass sich alle Bewegungen nur in einer (senkrecht orientierten) Ebene abspielen, dass die Leine immer gerade ist und keine Masse hat und dass die Last, die an der Leine hängt, eine Punktmasse ist. Messen Sie die Zeit t in Sekunden [s] und die Leinenlänge $L(t)$ und Wagenposition $P(t)$ in Metern [m]. Die Erdbeschleunigung ist $g = 9.81$ m/s^2.

   (a) Einfacher Kran, der nur die Leinenlänge verändern kann. Steuerung ist die Leinenlängenänderungsbeschleunigung $u_1(t)$. Zustände sind die Leinenlänge $L(t)$ und Leinenlängenänderungsgeschwindigkeit $\dot{L}(t)$. (4 Punkte)

   (b) Kran mit konstanter Leinenlänge, dessen Leine an einem waagrecht fahrenden Schienenwagen hängt, dessen Beschleunigung $u_2(t)$ wir steuern können. Die Position des Schienenwagens ist $P(t)$ und der Winkel der Leine - also die Abweichung von der Senkrechten - nennen wir $\alpha(t)$. Wieviele und welche Zustände x brauchen wir, um die Dynamik des Systems zu beschreiben? Welche Funktion $f(x, u_2)$ in $\dot{x} = f(x, u_2)$ beschreibt das System? (5 Punkte)

   Tipp: Berechnen Sie erst die Position $Q(t)$ der Masse in kartesischen Koordinaten als Funktion von $P(t)$ und $\alpha(t)$. Berechnen Sie dann $\ddot{Q}(t)$ und betrachten Sie die Beschleunigung nur in Tangentialrichtung.

   (c) * Kran mit variabler Wagenposition und variabler Leinenlänge mit den zwei Eingängen $u_1(t)$ und $u_2(t)$, dessen Last wir dadurch beliebig in der zweidimensionalen Ebene positionieren können. Wieviele und welche Zustände x brauchen wir, um die Dynamik des Systems zu beschreiben, und welche Funktion $f(x, u_1, u_2)$ in $\dot{x} = f(x, u_1, u_2)$ beschreibt das System? (2 Bonuspunkte)

Computer-Aufgaben (als MATLAB Code und Plots auf Papier, z.B. am 9.5.2014 von 8-10 im Computerpool zu bearbeiten)

3. Installieren Sie sich MATLAB auf Ihrem Laptop. Sie bekommen es im Softwareshop der Uni Freiburg gratis, Sie müssen dafür allerdings einen Antrag und und eine aktuelle Studienbescheinigung schicken (Instruktionen auf dem Web), und das Freischalten dauert dann etwa einen Werktag. Falls Sie am 9.5.2014 von 8-10 MATLAB noch nicht auf dem Laptop installiert haben, können Sie sich auch an einem der Computer im Pool einloggen.

4. Rufen Sie MATLAB nach der Installation auf, und lernen Sie die Grundzüge z.B. mit Hilfe von

   `http://www.mathworks.it/academia/student_center/tutorials/launchpad.html`

   Plotten Sie nun zur Übung eine Sinuskurve: definieren Sie einen liegenden Vektor $t = [0, 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 10]$ der Länge $N = 101$ und einen liegenden Vektor $s = [\sin t_1, \ldots, \sin t_N]$, der die Sinuskurve enthält. Plotten Sie die Sinuskurve mit Hilfe des Kommandos `plot(t,s)`. (1 Punkt)

   Tipp 1: Z.B. `help plot` zeigt an, wie `plot` bedient wird. Nutzen Sie `help` für jede neue MATLAB Funktion.

   Tipp 2: `t=[0:0.1:10]` erschafft den gewünschten Vektor `t`, und `s=sin(t)` den gewünschten Vektor `s`.

5. Simulieren Sie nun den Traktor. Definieren Sie dafür eine Differentialgleichungsfunktion `function [xdot]=myode(t,x)`, die das Modell des gesteuerten Traktors aus der Vorlesung implementiert, und nutzen Sie die existierende MATLAB Funktion `ode45` um eine Simulation des Traktors für die Anfangsbedingungen $\beta_0 = 45°$, $X_0 = 10$ m, $Y_0 = 10$ m für den Zeitraum 60 s zu berechnen. Nehmen Sie als Geschwindigkeit $V = 3$ m/s und als Achsabstand $L = 2$ m. Beachten Sie, dass $1° = \frac{\pi}{180}$ rad. Machen Sie für die Steuerung (Lenkwinkel) zwei verschiedene Annahmen:

   (a) Nehmen Sie zum ersten eine konstante Steuerung $\alpha(t) = 10°$, und plotten Sie die drei Zustände als drei Zeitverläufe. Plotten Sie zudem die Trajektorie der zwei ersten Zustände X, Y, also die Spur des hinteren Achsmittelpunktes, in der X-Y-Ebene. (2 Punkte)

   (b) Was passiert, wenn Sie $\alpha(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{1\text{s}}\right) * 10°$ setzen? Plotten Sie wieder die Zeitverläufe aller Zustände und der Steuerung, sowie die Spur des hinteren Achsmittelpunktes in der X-Y-Ebene. (3 Punkte)

6. * Wenn Sie noch Zeit und Lust haben, simulieren Sie auch eines oder mehrere der Kranmodelle aus Aufgabe 2, z.B. 2(b), und/oder das Waschbecken aus Aufgabe 1, mit konstantem Input $u(t) = u_0$, oder mit um einen Mittelwert oszillierendem Input verschiedener Frequenz der Form $u(t) = u_0 + U \sin(\omega t)$. Wählen Sie Ihnen passend erscheinende Anfangswerte. (2 Bonuspunkte)

Ingesamt gibt es 18 Punkte und 4 Bonuspunkte auf diesem Blatt. Von Blatt 0 gibt es noch 4 Bonuspunkte.