

Übungsblatt 2: Modellierung und Linearisierung

(Abgabe am 21.5.2014, 8:00-8:15 im Hörsaal. Frühere Abgabe möglich in Geb. 102, 1. Stock, Anbau, hinten links)

Prof. Dr. Moritz Diehl

1. Betrachten Sie das Waschbecken aus dem vorigen Blatt, das durch die ODE

$$\dot{x}(t) = u(t) - k\sqrt{x(t)} \quad (1)$$

modelliert wird. Betrachten Sie eine feste Flussrate u_{ss} und kleine Abweichungen $\delta u(t)$ davon.

- (a) Berechnen Sie den Gleichgewichtszustand x_{ss} . (1 P.)
(b) Linearisieren Sie das System im Gleichgewichtszustand, um eine ODE der folgenden Form zu erhalten. (2 P.)

$$\delta\dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t). \quad (2)$$

- (c) Nehmen Sie nun an, dass $k = 0.60\sqrt{\text{kg/s}}$ und $u_{ss} = 2.4 \text{ kg/s}$, und berechnen Sie x_{ss} , A , und B . (1 P.)
(d) Nutzen Sie die Simulationsroutine `ode45`, um erst Ihr nichtlineares Modell (1) für einen sinusförmigen Input der Form $u(t) = u_{ss} + u_A \sin \omega t$ für fünf Minuten zu simulieren. Starten Sie im Gleichgewichtszustand. Setzen Sie u_{ss} wie oben, wählen Sie z.B. $u_A = 1 \text{ kg/s}$, und nehmen Sie für die Oszillationsfrequenz ω an, dass eine Periode 10 Sekunden dauert. Simulieren Sie zum zweiten auch Ihr linearisiertes Modell (1) mit dem entsprechenden Input, und plotten Sie die resultierende Trajektorie $x_{ss} + \delta x(t)$ in den gleichen Plot wie die nichtlineare Simulation. Führen Sie die Simulationen für verschieden große Amplituden u_A durch. Ab welcher Amplitudengröße u_A kann man deutliche Unterschiede wahrnehmen? Geben Sie zwei Plots der Zustandstrajektorien ab, einen für eine kleinere Amplitude, und einen für eine größere. Vergessen Sie nicht, die Achsenbeschriftung inklusive Einheiten anzugeben (z.B. " $u(t)$ [kg/s]"). (3 P.)
(e) * Simulieren Sie bei festgehaltener Amplitude (z.B. $u_A = 1 \text{ kg/s}$) einmal das lineare und einmal das nichtlineare System für hundert Kreisfrequenzen ω mit Periodendauern zwischen 1 s und 1000 s (nutzen Sie z.B. `logspace`), messen Sie für jede Frequenz die erreichte Schwingungsamplitude x_A (z.B. maximal erreichter Wert von $x(t)$ minus Gleichgewichtszustand x_{ss}), und plotten Sie die erhaltenen Amplituden x_A als Funktion von ω . (2 B.P.)
2. Betrachten Sie einen elektrischen Schaltkreis, der aus einer Spule mit Induktivität L und einem in Reihe geschalteten Kondensator mit Kapazität C besteht. Nehmen Sie an, dass Sie die Eingangsspannung u zwischen Spuleneingang und Kondensatorausgang von außen vorgeben (also steuern) können.

- (a) Entscheiden Sie sich für geeignete Zustände x und leiten Sie eine Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f(x, u)$ her, die das Verhalten des Stroms $i(t)$ durch den Schaltkreis beschreibt. (3 P.)
(b) Bringen Sie die ODE in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. Geben Sie dafür die Matrizen A und B explizit an. (1 P.)
(c) Fügen Sie nun in jede Kabelverbindung noch einen Widerstand ein, mit Widerständen R_L , R_{LC} und R_C . Leiten Sie eine neue Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f(x, u)$ her und bringen Sie sie in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. (2 P.)
(d) * Simulieren Sie (z.B. in MATLAB) das System mit konstantem Eingang und Anfangsbedingung Null, um die Sprungantwort zu berechnen. Wählen Sie Ihnen passend erscheinende Parameter. (2 B.P.)

3. Untersuchen Sie, ob die folgenden Differentialgleichungen mit Eingangssignal $u(t)$ und Ausgangssignal $y(t)$ *linear* bzw. *zeitinvariant* sind, und begründen Sie Ihre Aussagen.

- (a) $\ddot{y}(t) = -ky(t) + u(t)$ (2 P.)
(b) $\ddot{y}(t) = -\sin(t) y(t) + u(t)$ (2 P.)
(c) $\ddot{y}(t) = -\sin(y(t)) + u(t)$ (1 P.)

Tipp: Gehen Sie zum Test der Linearität von zwei Lösungstrajektorien $u_1(t), y_1(t)$ und $u_2(t), y_2(t)$ aus, und zeigen Sie explizit, dass jede Linearkombination auch eine Lösung ergibt. Zum Test der Zeitinvarianz betrachten Sie eine in der Zeit verschobene Lösungstrajektorie und testen Sie, ob sie wieder eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Insgesamt gibt es 18 Punkte und 4 Bonuspunkte auf diesem Blatt.