Vorlesung Systemtheorie und Regelungstechnik (SR)
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg – Sommersemester 2014

Übungsblatt 3: Lineare Algebra, komplexe Zahlen und MATLAB

(Abgabe am 28.5.2014, 8:00-8:15 im Hörsaal. Frühere Abgabe möglich in Geb. 102, 1. Stock, Anbau, hinten links)

Prof. Dr. Moritz Diehl und Thilo Bronnenmeyer

MATLAB Einführungs-Aufgaben (als MATLAB Code und Plots, z.B. am 23.5.2014 von 8-10 im Computerpool zu bearbeiten)

Liste einiger für die Aufgaben nützlicher Kommandos: `help, eye, zeros, eigs, inv, for, transp, length`.

1. (a) Definieren Sie in MATLAB folgende Matrizen

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{(b) 10x10 Einheitsmatrix } B \qquad \text{(c) 3x3 Nullmatrix } C$$

(1 P.)

   (b) Transponieren Sie die Matrix A und multiplizieren Sie daraufhin $A^\top$ mit A. Lesen Sie aus dem Ergebnis die erste Zeile und multiplizieren diese mit der zweiten Spalte. (1 P.)

   (c) Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren der Matrix A, und finden Sie eine invertierbare Matrix V und Diagonalmatrix D so dass $A = VDV^{-1}$. Verifizieren Sie durch Berechnung des Matrixproduktes VDV^{-1}. (1 P.)

   (d) Nehmen Sie nun einen Eigenvektor v der Matrix A und berechnen Sie das Produkt $v_c = Av$, indem Sie nacheinander $v_a = V^{-1}v$, $v_b = Dv_a$, und $v_c = Vv_b$ berechnen. In welchem Zusammenhang steht v_b zu v_a, und in welchem steht v_c zu v? (2 P.)

2. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `[crossproduct] = mycrossproduct[a, b]`, die zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ als Input annimmt und Ihnen als Rückgabewert das Kreuzprodukt der beiden Vektoren liefert. Testen Sie Ihre Funktion mit zwei Vektoren Ihrer Wahl. (2 P.)

3. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `[dotproduct] = mydotproduct[a,b]`, die zwei Vektoren als Input annimmt und als Rückgabewert das Skalarprodukt der beiden Vektoren liefert. Nutzen Sie (zur Übung) eine `for` Schleife, die durch alle Komponenten der Vektoren geht. Beachten Sie dabei, dass die beiden Vektoren beliebig lang sein können. (1 B.P.)

Systemtheorie Aufgaben (dürfen auch schon am 23.5.2014 von 8-10 im Computerpool bearbeitet werden)

4. Ein (ungesteuertes) lineares dynamisches System sei durch die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ beschrieben, mit beliebiger Matrix A. Betrachten Sie einen Eigenvektor v von A, so dass $Av = \lambda v$. Beweisen Sie, z.B. unter Verwendung der Definition des Matrixexponentials $e^M = I + M + \frac{M^2}{2} + \ldots$, dass die Lösung des Anfangswertproblems mit Anfangswert $x(0) = v$ gegeben ist durch $x(t) = ve^{\lambda t}$. (3 P.)

5. Betrachten Sie nun das System $\dot{x} = Ax$ mit Ausgangsgleichung $y = Cx$ und Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -9.9 & 10.1 \\ 10.1 & -9.9 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Nutzen Sie `ode45` und simulieren Sie, beginnend mit dem Anfangswert $x_0^{\mathrm{a}} = [1, 1]^\top$, das System für 10 Zeiteinheiten (die wir im folgenden der Einfachheit halber "Sekunden" nennen). Plotten Sie den Zeitverlauf von y. (1 P.)

   (b) Simulieren Sie nun erneut für 10s, aber mit dem Startwert $x_0^{\mathrm{b}} = [1, -1]^\top$, und plotten Sie. (1 P.)

   (c) Simulieren sie noch ein drittes Mal für 10s, aber jetzt für den Anfangswert $x_0^{\mathrm{c}} = x_0^{\mathrm{a}} + x_0^{\mathrm{b}} = [2, 0]^\top$. (1 P.)

   (d) Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen den drei Simulationen (a)-(c) unter dem Stichwort "Linearität". (1 P.)

   (e) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A, und geben Sie die zwei Eigenwerte λ_1 und λ_2 an. Stellen Sie einen Zusammenhang mit den Simulationen (a) und (b) her. (1 P.)

6. Ein dynamisches System, z.B. ein elektrischer Schwingkreis, sei durch die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax + Bu$ und Ausgangsgleichung $y = Cx$ beschrieben, mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Simulieren Sie es z.B. mit `ode45` für die Anfangsbedingung $x_0 = [0, 0]^\top$ und konstanten Eingang $u(t) = 1$ (Sprungantwort), und plotten Sie beide Zustände im Zeitverlauf für 10s. (2 P.)

   (b) Plotten Sie zum selben Szenario auch den Ausgang y im Zeitverlauf. (1 P.)

   (c) Berechnen Sie die Eigenwerte von A, und diskutieren Sie den Zusammenhang mit dem Ergebnis der Simulation. (1 B.P.)

7. (Lorenz-Attraktor) Betrachten Sie das System $\dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1)$, $\dot{x}_2 = x_1(28 - x_3) - x_2$, $\dot{x}_3 = x_1 x_2 - 2.66 x_3$. Ist es linear oder nichtlinear? Simulieren Sie für zwei leicht verschiedene Anfangswerte, und plotten und vergleichen Sie das Ergebnis. (2 B.P.)

Ingesamt gibt es 18 Punkte und 4 Bonuspunkte auf diesem Blatt.