

### ACHTUNG: WICHTIGE MITTEILUNG ZUR NOTENBERECHNUNG

Aufgrund eines von Frau Schneider entdeckten Formfehlers des Dozenten kann das in der Vorlesung und auf Übungsblatt 0 beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Endnote (80% Abschlussklausur, 10% Mikroklausuren, 10% Übungsblätter) in diesem Semester noch nicht verwendet werden. Das Problem ist, dass dieses Benotungsverfahren zu Beginn des Semesters nicht im elektronischen System dargestellt war, und eine Änderung des Systemeintrags im laufenden Semester aus juristischen Gründen nicht mehr möglich ist. Stattdessen gilt (leider) das im System beschriebene Verfahren aus dem letzten Semester: die Endnote wird zu 100% aus der Note der Abschlussklausur bestimmt, während die Übungszettel und Mikroklausuren nur Einfluss auf die Klausurzulassung haben. Die Bestimmung der Bestehensgrenzen für die Klausurzulassung war im System nicht genau spezifiziert, und darf zu Semesterbeginn direkt vom Dozenten an die Studenten mitgeteilt werden, ohne über das System zu gehen. Dies soll jetzt also nachgeholt werden.

*Es gelten folgende Richtlinien: zur Klausurzulassung müssen jeweils mindestens 50% der Gesamtpunkte der vier Mikroklausuren, und 50% der Gesamtpunkte aller Übungszettel erreicht worden sein. Die Endnote wird zu 100% aus dem Ergebnis der Abschlussklausur berechnet.*

Wir bitten Sie um Entschuldigung für die bisherige falsche Kommunikation. Bei wichtigen Fragen diesbezüglich wenden Sie sich bitte direkt an Ihre/n Übungsgruppenleiter/in, oder machen Sie einen Termin mit dem Dozenten aus, indem Sie an die Sekretärin des Dozenten, Frau Christine Paasch [paasch@imtek.uni-freiburg.de](mailto:paasch@imtek.uni-freiburg.de) schreiben.

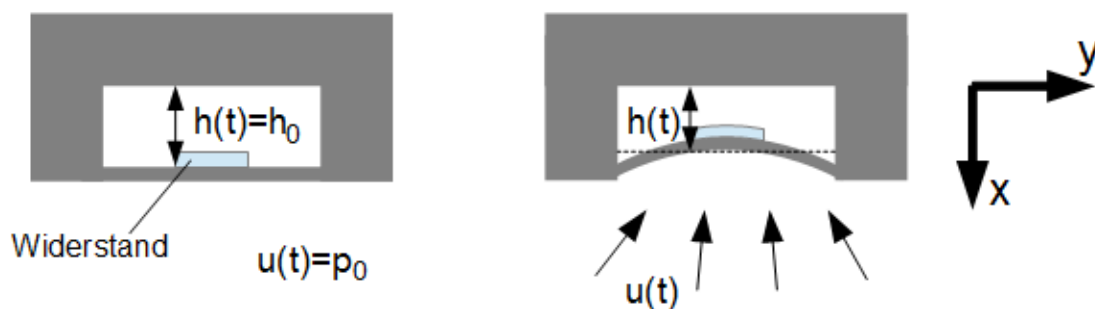
### Übungsblatt 4: Modellierung eines Drucksensors

(Abgabe am 4.6.2014, 8:15, im Hörsaal, oder früher in Geb. 102, 1. Stock, Anbau, hinten links)

Prof. Dr. Moritz Diehl und Lukas Klar

---

Ziel dieser Übung ist die Modellierung eines Drucksensors, wie Sie ihn in vorhergehenden Vorlesungen kennengelernt haben, und wie er in der folgenden Abbildung dargestellt ist. Das Grundprinzip ist Folgendes: Die Membran wölbt sich in Abhängigkeit von der Druckdifferenz zwischen der Innenkammer und der Umgebung nach innen oder außen. Durch die Verbiegung des Membranrandes wird ein oben auf der Membran angebrachter Widerstand erhöht oder erniedrigt.



Der Sensor wird meist für die Detektion langsamer Druckänderungen verwendet. Der erste Teil hat deshalb als Ziel, ein einfaches statisches Modell des Drucksensors zu finden. Wenn man jedoch sehr schnelle Druckänderungen detektieren möchte, wie sie z.B. durch Schall hervorgerufen werden, spielt die Dynamik der Membran eine Rolle. Der zweite Teil des Blattes hat deshalb das Ziel, ein dynamisches Modell des Sensors zu finden. Wir modellieren das System als Eingangs-Ausgangs-SISO System, wobei der Umgebungsdruck den Eingang  $u(t)$  darstellt [in Pa] und der elektrische Widerstand des Biege-Elementes den Ausgang  $y(t)$  [in Ohm].

#### Statisches Modell des Drucksensors

1. Leiten Sie einen statischen Zusammenhang zwischen dem Umgebungsdruck  $u(t)$  als Eingang und dem elektrischen Widerstand  $y(t)$  als Ausgang her, indem Sie das Kräftegleichgewicht an der Membran betrachten.

Nehmen Sie dafür an, dass der Hohlraum zylindrisch ist und ein Volumen  $V(t) = Ah(t)$  hat, wobei  $A$  die Membranfläche und  $h(t)$  die mittlere Höhe der Membran ist. Die Differenz des Innendrucks  $p(t)$  und des Außendrucks  $u(t)$  erzeugt eine

Kraft  $F_D = A(p(t) - u(t))$ . Beachten Sie dabei, dass der Innendruck  $p$  nicht konstant ist, sondern sich durch Zusammendrücken der Membran erhöht. Er gehorcht nach dem allgemeinen Gasgesetz bei konstanter Temperatur der Gleichung  $p = \frac{p_0 V_0}{V}$ , bei der  $p_0$  der Druck bei gerader Membran und  $V_0$  das dazugehörige Volumen der Kammer ist ( $V_0 = h_0 A$ ).

Die Druckkraft  $F_D$  wird durch die Eigenelastizität der Membran kompensiert. Die Gegenkraft  $F_M(t)$  der Membran modellieren wir wie eine Feder nach dem Hookeschen Gesetz, wir nehmen sie also als linear an und machen den Ansatz  $F_M(t) = -k_1(h - h_0)$ . Dabei ist  $k_1$  eine positive Konstante und  $h_0$  die Auslenkungshöhe bei gerader Membran. Aus dem Gleichgewicht der Kräfte kann man die Membranauslenkung  $h - h_0$  als Funktion von  $u$  schreiben.

Wir nehmen an, dass der Widerstand  $y(t)$  des Dehnstreifens affin zur Auslenkung der Membran ist, also  $y(t) = R_0 - k_2(h(t) - h_0)$  mit dem Widerstand  $R_0$  bei Nullauslenkung, und einer positiven Konstanten  $k_2$ .

Welche Funktion  $g$  beschreibt den statischen Zusammenhang

$$y(t) = g(u(t))$$

zwischen dem Außendruck  $u(t)$  und dem elektrischen Widerstand  $y(t)$  des Dehnstreifens? (4 P.)

2. Wieviele Zustände hat das Modell aus Aufgabe 1? (1 P.)

3. Linearisieren Sie das Modell aus Aufgabe 1 (entwickeln Sie also die Taylorreihe) in der Ruhelage beim Referenzdruck  $u_0 = p_0$  (mit Höhe  $h_0$ ). Dies geht am einfachsten, indem Sie in der Herleitung die Druckgleichung  $p = p_0 V_0 V^{-1}$  als Taylorreihe nach dem Volumen  $V$  entwickeln und dann mit dieser Vereinfachung weiterrechnen. Schreiben Sie das resultierende Modell in der affinen Form

$$y(t) = y_0 + D(u(t) - u_0)$$

indem Sie die beiden Konstanten  $y_0$  und  $D$  angeben.

(1 P.)

### Dynamisches Modell des Drucksensors

4. Wir wollen nun untersuchen, wie der Widerstand  $y(t)$  sich bei schnellen Änderungen des Drucks  $u(t)$  verhält. Dazu müssen wir beachten, dass durch die Masse  $m$  der Membran eine Trägheit hinzukommt, die die Membranauslenkung verzögert. Es gilt also nach Newton  $m\ddot{h}(t) = F(t)$ , wobei  $F = F_D + F_M + F_R$  die Gesamtkraft ist, die auf die Membran wirkt. Diese Kraft besteht aus drei Komponenten: neben der Druckdifferenz und der Membranelastizität aus Aufgabe 1 kommt noch eine innere Membranreibungskraft  $F_R(t)$  hinzu, die wir als proportional zur Membrangeschwindigkeit annehmen,  $F_R(t) = -\beta\dot{h}(t)$  mit einer Konstanten  $\beta$ . Zudem kann die Gastemperatur  $T(t)$  im Innenraum bei schnellen Auslenkungen nicht mehr als konstant angenommen werden, sondern wird z.B. durch schnelle adiabatische Kompression erhöht, was zu einer stärkeren Druckerhöhung führt als bei gleichbleibender Temperatur. Dies führt dazu, dass statt  $p = p_0 V_0 V^{-1}$  jetzt das adiabatische Kompressionsgesetz  $p = p_0 V_0^\kappa V^{-\kappa}$  gilt, mit einem Koeffizienten  $\kappa$  ("Isentropenexponent"), der für Luft/Stickstoff bei Raumtemperatur ca.  $\kappa = 1.4$  beträgt. Dies ändert die Kraft  $F_D$ . Leiten Sie eine (nichtlineare) Differentialgleichung zweiter Ordnung für das Eingangs-Ausgangs-System mit Eingang  $u(t)$  und Ausgang  $y(t)$  her. (6 P.)

5. Bringen Sie die Differentialgleichung in Zustandsform  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = g(x, u)$ , wobei Sie  $h(t)$  und  $\dot{h}(t)$  als Zustände  $x = [h, \dot{h}]^\top$  nehmen. Schreiben Sie die Funktionen  $f(x, u)$  und  $g(x, u)$  explizit. Finden Sie zu konstantem Eingang  $u_{ss}$  einen Gleichgewichtszustand  $x_{ss}$  und zugehörigen Ausgang  $y_{ss}$ . Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Aufgabe 1. Welchen Wert müsste der Isentropenexponent  $\kappa$  haben, damit das gleiche Ergebnis wie in Aufgabe 1 herauskommt? (3 P.)

6. Linearisieren Sie das System im Gleichgewichtszustand. Führen Sie die resultierende lineare Differentialgleichung in  $\delta y(t)$  und  $\delta u(t)$  zurück in die Eingangs-Ausgangsform indem Sie die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_n$  angeben.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_n \frac{d^n u}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u. \quad (1)$$

Vergleichen Sie mit Aufgabe 4 und diskutieren Sie die Unterschiede. (3 P.)

7. Um ein Modell zu erhalten, das sowohl für langsame als auch für schnelle Druckänderungen gültig ist, müssen wir den Mechanismus der Lufterwärmung genauer modellieren. Wir dürfen dazu annehmen, dass die innere Energie  $U(t) = \frac{nR}{\kappa-1} T(t)$  des Gases im Inneren (mit der konstanten Gasmenge  $n$  in Mol, Gaskonstanten  $R$ , und der Gastemperatur  $T(t)$ ) durch die Kompressionsarbeit  $-p(t)\dot{V}(t)$  erhöht wird. Gleichzeitig gibt es einen Wärmeaustausch mit der Umgebung (die die konstante Temperatur  $T_0$  hat), den wir durch einen Energiefluss  $-k_3(T(t) - T_0)$  modellieren, mit einer Konstanten  $k_3$ . Sobald wir die Temperatur  $T$  und das Volumen  $V$  des Gases kennen, können wir nach dem allgemeinen Gasgesetz auch  $p$  berechnen:  $p = \frac{nRT}{V}$ .

Wählen Sie aufbauend auf dem Modell aus Aufgabe 4 einen geeigneten erweiterten Zustandsvektor  $x$ , und leiten Sie eine Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = g(x, u)$  her. Wieviele und welche Zustände hat Ihr System jetzt? Berechnen Sie für gegebenen konstanten Eingang  $u_{ss}$  den Gleichgewichtszustand  $x_{ss}$  sowie  $y_{ss}$ . Vergleichen Sie Ihr Ergebnis wieder mit Aufgabe 1, und diskutieren Sie. (4 B.P.)

Insgesamt gibt es 18 Punkte und 4 Bonuspunkte auf diesem Blatt.